18-10451@usb.ve Carlo M. Herrera Di Giacinto

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

RESUMEN TEÓRICO MATEMÁTICAS III (MA-1116)
$(3^{er} PARCIAL)$

Prefacio

La presente guía ha sido creada con el fin de facilitarles a los estudiantes de la Universidad Simón Bolívar un resumen teórico de los temas principales referentes al Álgebra Lineal ajustada al programa vigente del curso de Matemáticas III (MA-1116), tanto en lo concerniente al orden de los tópicos como a la profundidad con que estos son tratados. Sin embargo, por la forma en que están presentados los diversos temas, esta obra también puede ser de interés para estudiantes de otras instituciones universitarias que requieran adquirir nociones básicas del Álgebra Lineal.

Extiendo mis agradecimientos al profesor **Jorge Sánchez Rivero (Galipán)** por transmitirme la pasión por este curso y por el apoyo durante el proceso de creación de esta guía, tanto por la información acá expuesta (extraída de sus clases) como por la revisión del material.

Agradecimientos a **GECO USB**, agrupación estudiantil de la que soy miembro, por ayudarme a crear y distribuir este material y por guiarme con las dudas que surgieron durante el proceso de digitalización.

Agradecimientos especiales a **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Ka Man Fung, Oscar González, Juan Cazaubon y Jose Carlos Contreras** compañeros del curso y amigos que me han ayudado a compilar la información y a crear el formato de la guía.

Los siguientes comentarios (extraídos del libro "Álgebra lineal y sus aplicaciones" de David C. Lay) ofrecen algunos consejos prácticos e información para ayudarle a dominar el material y disfrutar del curso.

En álgebra lineal, los *conceptos* son tan importantes como los *cálculos*. Más adelante en su carrera, las computadoras harán los cálculos, pero usted tendrá que elegir cuáles son pertinentes, saber interpretar los resultados, y después explicar los resultados a otras personas. Por esta razón, muchos ejercicios le piden que explique o justifique sus cálculos. Con frecuencia se solicita una explicación por escrito como parte de la respuesta. Debe evitar la tentación de consultar las respuestas antes de haber tratado de escribir la solución. De lo contrario, es probable que crea que entiende algo cuando en realidad no es así.

Para dominar los conceptos de álgebra lineal, tendrá que leer y releer el texto con cuidado. Los nuevos términos aparecen en negritas, a veces dentro de un recuadro de definición.

En un sentido práctico, el álgebra lineal es un lenguaje. Usted tiene que aprender este lenguaje de la misma manera que un idioma extranjero, esto es, con el trabajo diario. ***¡Mantenerse al día con el curso le ahorrará mucho tiempo y angustia!***

Esta guía fue preparada, organizada y digitalizada en LaTeX por Carlo Herrera. Cualquier error se agradece notificarlo al autor.

I. Espacio con Producto Interno (EVPI).

1. Definiciones.

1.1. **Espacio con producto interno (EVPI):** un espacio vectorial complejo V se denomina espacio con producto interno si para cada par ordenado de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en V, existe un único número complejo $<\vec{u},\vec{v}>$, denominado producto interno de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tal que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$

$<\vec{v},\vec{v}> = 0 \Longleftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

$<\vec{u}+\vec{v},\vec{w}>=<\vec{u},\vec{w}>+<\vec{v},\vec{w}>$

$<\vec{u},\vec{v}+\vec{w}>=<\vec{u},\vec{v}>+<\vec{u},\vec{w}>$

$<\vec{u},\vec{v}>=<\overline{\vec{v},\vec{u}}>$ (conjugada compleja de u y v)

$<\alpha\vec{u},\vec{v}>=\alpha<\vec{u},\vec{v}>$

$<\vec{u},\alpha\vec{v}>=\overline{\alpha}<\vec{u},\vec{v}>$

1.2. Sean $\vec{u}$,$\vec{v}$ vectores en un **EVPI**, entonces:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si $<\vec{u},\vec{v}>=0$

b) La norma de $\vec{v}$, $||\vec{v}||$, está dada por $||\vec{v}||=\sqrt{<\vec{v},\vec{v}>}$

1.3. **Traza de una matriz:** Sea $A=(a_{ij})$, la traza de una matriz en M_n, denotada por $Tr(\cdot)$, viene dada por:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Δ Productos internos usuales

i) En $\mathbb{R}^n$, $<\vec{u},\vec{v}>=\vec{u}\cdot\vec{v}$

ii) En $\mathbb{C}^n$, $<\vec{u},\vec{v}>=\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}}$

iii) En $C[a,b]$, $<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)dx$

- En $P_n[0,1]$, $<p,q>=\int_0^1 p(x)q(x)dx$

iv) En M_{mn}, $<A,B>=Tr(AB^T)$

Δ Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $\vec{u}$,$\vec{v} \in V$, un EVPI, entonces:

$$\boxed{|\,\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle\,| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Δ Desigualdad triangular

$$\boxed{||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||}$$

II. Conjuntos ortonormales y sus bases.

1. Definiciones.

1.1. **Conjunto ortonormal:** El conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es un conjunto ortonormal de un EVPI V si:

$i)$ $< \vec{v}_i, \vec{v}_j >= 0$, $\forall\ i \neq j$

$ii)$ $< \vec{v}_i, \vec{v}_i >= 1$ v $||\vec{v}_i|| = 1$, $\forall\ i$ (Todos los vectores tienen norma 1)

1.2. **Proyección ortogonal:** Sea H un subespacio de V, un EVPI, $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de H, entonces la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre H para cualquier $\vec{v} \in V$ está dada por:

$$\begin{aligned} Proy_H\ \vec{v} &= \langle \vec{v}, \vec{u_1} \rangle\, \vec{u_1} + ... + \langle \vec{v}, \vec{u_n} \rangle\, \vec{u_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{u_k} \rangle\, \vec{u_k} \end{aligned}$$

1.3. **Ortonormalización de bases (Algoritmo de Gram-Schmidt)**: Sea $\beta_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V, un EVPI, y sea $\beta_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ la base ortonormal deseada; entonces:

1) $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||}$

2) $\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{v}_2\prime}{||\vec{v}_2\prime||}$, donde $\boxed{\vec{v}_2\prime = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle\, \vec{u}_1}$

3) $\vec{u}_3 = \dfrac{\vec{v}_3\prime}{||\vec{v}_3\prime||}$, donde $\boxed{\vec{v}_3\prime = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle\, \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle\, \vec{u}_2}$

.

.

.

n) $\vec{u}_n = \dfrac{\vec{v}_n\prime}{||\vec{v}_n\prime||}$, donde $\boxed{\vec{v}_n\prime = \vec{v}_n - \langle \vec{v}_n, \vec{u}_1 \rangle\, \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_n, \vec{u}_2 \rangle\, \vec{u}_2 - ... - \langle \vec{v}_n, \vec{u}_{n-1} \rangle\, \vec{u}_{n-1}}$

2. Teoremas.

2.1. Cualquier conjunto finito de vectores ortogonales distintos de cero en un EVPI es LI.

2.2. Cualquier conjunto finito de vectores LI en un EVPI puede convertirse en un conjunto ortonormal mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. En particular, todo EVPI tiene una base ortonormal.

2.3. Una matriz Q_{nxn} es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

2.4. Sea $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de V, un EVPI. Entonces si $\vec{v} \in V$

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u_1} \rangle \, \vec{u_1} + ... + \langle \vec{v}, \vec{u_n} \rangle \, \vec{u_n}$$

Esto es

$$\boxed{Proy_V \ \vec{v} = \vec{v}}$$

2.5. La proyección ortogonal está bien definida: es independiente de la base ortonormal utilizada.

III. Complemento ortogonal.

1. Definiciones.

1.1. **Complemento ortogonal:** Sea H un subespacio de V, un EVPI, el complemento ortogonal de H, denotada por $H^\perp$, está dado por:

$$H^\perp := \left\{ \vec{v} \in V : \ < \vec{v}, \vec{h} >= 0, \quad \forall \ \vec{h} \in H \right\}$$

1.2. **Distancia de un vector a un subespacio vectorial:** Sea $\vec{v}$ un vector en H, un subespacio vectorial y $H^\perp$ el complemento ortogonal de H, la <u>distancia del vector $\vec{v}$ a H</u> será igual a

$$\boxed{||\vec{v} - Proy_H \ \vec{v}|| = ||Proy_{H^\perp} \ \vec{v}||}$$

2. Teoremas.

2.1. Si H es un subespacio de un EVPI, V, entonces:

· $H^\perp \ \leq \ V$
· $H \ \cap \ H^\perp \ = \left\{ \vec{0} \right\}$

·Si $dimV = n < \infty$, entonces
$dimH \ + \ dimH^\perp \ = \ dimV$

2.2. **(Teorema de Proyección)** Sea H un subespacio de dimensión finita de un EVPI, V. Sea $\vec{v} \in V$, entonces existe un par único de vectores $\vec{p}$ y $\vec{h}$, tales que:

$$\vec{h} \in H \quad , \quad \vec{p} \in H^{\perp} \quad y \quad \vec{v} = \vec{h} + \vec{p}$$

,
donde

$$\boxed{\vec{h} = Proy_H \ \vec{v};}$$

y además, si V es de dimensión finita, entonces

$$\boxed{\vec{p} = Proy_{H^{\perp}} \ \vec{v}}$$

IV. Transformación Lineal.

1. Definiciones.

1.1. **Transformación Lineal:** Sean V y W espacios vectoriales, una transformación lineal T de V en W, es una función que asigna a cada vector $\vec{v} \in V$ una único vector $T(\vec{v}) \in W$, y que satisface para cada vector $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ y cada escalar α:

i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

ii) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha \ T(\vec{u})$

1.2. **Núcleo de la transformación:** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal; el núcleo o kernel de T está dado por:

$$Nu_T = Ker(T) := \left\{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0} \right\}$$

1.3. **Nulidad de la transformación:** La nulidad de T, $\nu(T)$, es la dimensión de Nu_T.

1.4. **Imagen de la transformación:** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal; la imagen de T está dada por:

$$Im(T) := \{\vec{w} \in W : T(\vec{v}) = \vec{w}, \ para \ algún \ \vec{v} \in V\}$$

1.5. **Rango de la transformación:** El rango de T, $\rho(T)$, es la dimensión de $Im(T)$.

1.6. **Matriz de Transformación:** La matriz A_T del **Teoremazo 2** se llama matriz de transformación , matriz asociada a T o representación matricial de T.

2. Teoremas.

2.1. $Nu(T) \leq V$ e $Im(T) \leq W$

2.2. **(Teoremazo 2)** Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m y bases $\beta_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ y $\beta_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_m\}$ respectivamente. Entonces, existe una matriz única $A_{T_{mxn}}$ tal que:

$$\boxed{[T(\vec{x})]_{\beta_2} = A_{\mathrm{T}}[\vec{x}]_{\beta_1} \ \ \forall\ \vec{x} \in V}$$

2.3. Sea A_T **la matriz de transformación** de $T : V \longrightarrow W$ con $dimV = n$ y $dimW = m$. Entonces:

$\cdot Nu(T) = N_{A_T}$ $\cdot Im(T) = Im(A_T)$ $\cdot \nu(T) = \nu(A_T)$

$\cdot \rho(T) = \rho(A_T)$ $\cdot \rho(T) = \rho(A_T)$

Observación:

$\cdot Im(T)$ será "de verdad igual" a $Im(A_T)$ sólo si $W = \mathbb{R}^m$

$\cdot Nu(T)$ será "de verdad igual" a N_{A_T} sólo si $V = \mathbb{R}^n$

De lo contrario, es necesario interpretar los resultados obtenidos en $Im(A_T)$ (o N_{A_T}) si se desea $Im(T)$ (o $Nu(T)$).

2.4. Si tenemos $T : V \longrightarrow V$ y sea A_T la matriz de transformación asociada a la base β_1 y B_T la matriz de transformación asociada a la base β_2, entonces $A_T \sim B_T$

3. Propiedades.

Sea $T : V \longrightarrow W$:

3.1. $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

3.2. $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$

3.3. $T(C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + ... + C_n\vec{v}_n) = C_1T(\vec{v}_1) + C_2T(\vec{v}_2) + ... + C_nT(\vec{v}_n)$

V. Autovalores y Autovectores.

1. Definiciones.

1.1. **Autovalor:** Sea A_{nxn}, el número λ (real o complejo) se llama autovalor (valor característico, eigenvalor o valor propio) de A si existe un vector distinto de cero $\vec{v}$ tal que:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}} \implies \boxed{(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}} \quad (1)$$

1.2. **Autovector:** el vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ se denomina autovector (vector característico, eigenvector o vector propio) de A asociado al autovalor λ.

1.3. **Ecuación característica:** La ecuación $P(\lambda) = det(A-\lambda I) = 0$ se llama ecuación característica de A

1.4. **Polinomio característico:** El polinomio $P(\lambda) = det(A-\lambda I)$ se denomina polinomio característico de A.

1.5. **Multiplicidades algebraicas y multiplicidad geométrica:** Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ las diferentes raíces de $P(\lambda)$ en la ecuación característica con multiplicidades $r_1, r_2, ..., r_k$, entonces $P(\lambda)$ se puede factorizar como

$$\boxed{P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}...(\lambda - \lambda_k)^{r_k}}$$

Los números $r_1, r_2, ..., r_k$ se denominan multiplicadores algebraicos de los autovalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$

Sea λ un autovalor de A_{nxn}, entonces la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del autoespacio correspondiente (que es la nulidad de $A - \lambda I$). Es decir:

$$\boxed{mg_\lambda = dimE_\lambda = \nu(A - \lambda I)}$$

2. Teoremas.

2.1. Sea A_{nxn} entonces λ es un autovalor de A si y sólo si

$$\boxed{P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0}$$

2.2. Sea λ un autovalor de A_{nxn}, entonces:

$$\boxed{E_\lambda = \{\vec{v} : A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}}$$

denominado autoespacio (espacio característico o propio) correspondiente al autovalor λ, es un subespacio propio de $\mathbb{C}^n$.

2.3. Autovectores correspondientes a autovalores distintos son LI.

2.4. Si λ es autovalor de A_{nxn},entonces:

$$\boxed{0 < mg_\lambda \leq ma_\lambda}$$

2.5. Sea A_{nxn}, entonces:

$$\textbf{A} \text{ tiene n autovectores LI} \quad \Longleftrightarrow \quad ma_\lambda = mg_\lambda; \ \ \forall\lambda \text{ autovalor de } \textbf{A}$$

En particular, A tiene n autovectores LI si tiene n autovalores distintos.

2.6. $\lambda = 0$ es un autovalor para una matriz A_{nxn} si y sólo si A es singular

2.7. Si A $\in M_2$, entonces

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A)}$$

3. Propiedades.

Sea A_{nxn} y λ_k sus autovalores, con $k = 1, 2, ..., n$:

3.1.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = Tr(A)$$

3.2.

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A$$

VI. Matrices Semejantes.

1. Definiciones.

1.1. **Matrices semejantes:** Decimos que dos matrices A_{nxn} y B_{nxn} son semejantes ($A \sim B$) si existe una matriz invertible C_{nxn} tal que:

$$\boxed{B = C^{-1} A\ C} \quad (1)$$

O, análogamente,

$$\boxed{CB = AC} \quad (2)$$

2. Teoremas.

2.1. Si A y B son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico y, por consiguiente, los mismos autovalores.

VII. Diagonalización y Diagonalización Ortogonal.

1. Definiciones.

1.1. **Diagonalización:** Una matriz A_{nxn} es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que $A \sim D$. Es decir, si existe una matriz invertible C_{nxn} tal que $D = C^{-1} A\ C$, con D una matriz diagonal.

Una matriz C con esta propiedad decimos que diagonaliza a A, o que es la matriz diagonalizante.

1.2. **Diagonalización ortogonal:** Decimos que A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q_{nxn} tal que:

$$\boxed{D = Q^T A\ Q = Q^{-1} A\ Q}$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores de A.

1.3. **Transpuesta conjugada de una matriz:** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz compleja entonces la transpuesta conjugada de A, denotada por $A^* = (\overline{a_{ji}})$

1.4. **Matriz Hermitiana:** La matriz A se llama hermitiana o hermítica si $A^* = A$. *(Es el equivalente complejo a las matrices simétricas en los reales).*

1.5. **Matriz Unitaria:** La matriz A se llama unitaria si $A^* = A^{-1} \quad \vee \quad$ si $AA^* = A^*A = I_n$. *(Es el equivalente complejo a las matrices ortogonales en los reales).*

2. Teoremas.

2.1. Una matriz A_{nxn} es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores LI. Además la matriz diagonal $D = C^{-1}A\ C$, es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix};$$

con λ_k los autovalores de A y la matriz diagonalizante C_{nxn} aquella cuyas columnas son los autovectores LI de A

2.2. En general, si A_{nxn} tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.

2.3. Sea A_{nxn} una matriz simétrica real. Entonces:

i) Todos sus autovalores son reales.

ii) Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son autovectores de autovalores correspondientes λ_1 y λ_2 distintos, entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.

iii) A tiene n vectores autonormales.

2.4. Sea A_{nxn} una matriz real; entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

2.5. Suponga una matriz A_{2x2} tiene un autovalor λ de ma=2 y mg=1. Sea $\vec{v}_1$ un autovector correspondiente a λ, entonces existe un vector $\vec{v}_2$ que satisface la ecuación

$$\boxed{(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1} \quad (1)$$

El vector $\vec{v}_2$ que satisface (1) se llama vector característico (autovector) generalizado de A correspondiente a λ.

2.6. (**Teorema de Cayley-Hamilton**). Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir: sea $P(\lambda) = 0$ esta ecuación, entonces $P(A) = 0$.

Agradecimientos.

Al **Prof. Jorge Sánchez** por la información (extraída de sus clases) y revisión del material.

A **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Oscar González, Ka Man Fung y Juan Cazaubon**; colaboradores en la elaboración de la guía.

Δ *Última modificación*: 20 de febrero de 2020

Agradecimientos especiales a GECO USB

gecousb.com.ve | @GECOUSB

Autor:

Carlo Miguel Herrera Di Giacinto
18-10451
@cmhd2001 | carlomhd2001@gmail.com